Geometría II
Examen VIII

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría II
Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría II.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Ros Mulero[1].

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 16 de junio de 2023.

[1] El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1. Se considera la matriz con coeficientes reales:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores propios y los subespacios de vectores propios de A.
2. Calcular una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.
3. Calcular A^{2023}.
4. Sin realizar cálculo directo, razonar que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I)$.

Ejercicio 2. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por
$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(4x - 3y + z, y + 3z, -2z)$$
no es isometría para ninguna métrica g sobre $\mathbb{R}^3$.
2. Existe $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q$$
3. Todo endomorfismo diagonalizable $f : V \to V$ en $\mathbb{R}$ es autoadjunto para alguna métrica euclídea g sobre V.

Ejercicio 3. En el espacio vectorial Euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, consideramos el giro f de eje L y ángulo $\theta \in]0, \pi]$, y la reflexión s respecto de un plano vectorial $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que
$$f \circ s = s \circ f.$$

1. Demostrar que s lleva vectores propios de f en vectores propios de f, del mismo valor propio.
2. Concluir que $L = U^\perp$ o $L \subset U$.
3. Demostrar que si $L \subset U$, entonces el giro f es la reflexión respecto de L.